Problème de révision concours MP 2025

Sur quelques questions de calcul différentiel

Notations et conventions

Pour tout entier $n > 0$, on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $||\,.\,||$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1. On note $\mathrm{Tr}\,(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^tM$ sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M\,{}^t\widetilde{M} = \det(M)\,I_n\ .$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t \mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M. De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f : U \to \mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x, soit :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \quad df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))\ .$$

Préliminaires

1a. Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\ker\beta \subset \ker\alpha$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

1b. Soient $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i \subset \ker\alpha$. Montrer que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_r$. (Une méthode possible est de raisonner par récurrence sur r, en considérant, pour $r \geq 2$, la restriction de α et β_r à $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker\beta_i$).

Première partie

2. Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad ||\gamma(t)|| = 1 \ .$$

Montrer que pour tout t dans $]-1,1[$, $\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $||x|| = 1$ et soit $v \in \mathbf{R}^n$, non nul, orthogonal à x. Montrer qu'il existe une application $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in]-1,1[$, $||\gamma(t)|| = 1$, $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

4. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1}. Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n) \ .$$

5. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{cases} .$$

5a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b. Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}. Montrer que x est vecteur propre de A.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2 \end{cases}$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i-ème ligne et j-ième colonne,

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{cases}$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g.

6a. Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}\,({}^tMM)$.

6b. Vérifier que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c. Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.
En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \mathrm{Tr}\,({}^t\widetilde{M}H)$.

8. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}\,(M)}$.

10. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[\to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \mapsto M\exp(tM^{-1}H) \end{cases}$$

est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M$, $\gamma'(0) = H$.

11. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a. Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b. Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?